Εισαγωγή στην Τοπολογία
4ο online Μάθημα
7/4/2020

Πόρισμα: Αν ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος και $A \subseteq X$ τότε ο υπόχωρος (A, ρ_A) είναι επίσης διαχωρίσιμος

Απόδειξη: Από το προηγούμενο θεώρημα $(i) \Rightarrow (ii)$, αφού ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος υπάρχει αριθμήσιμη βάση $\mathcal{B}$ για την τοπολογία του. Αυτό σημαίνει ότι

α) $\mathcal{B}$ αριθμήσιμη

β) Η $\mathcal{B}$ αποτελείται από ανοικτά σύνολα

γ) Για κάθε $G \subseteq X$ ανοικτό και κάθε $x \in G$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subseteq G$.

Θα ορίσουμε μια οικογένεια υποσυνόλων του A που έχει τις ίδιες ιδιότητες

Ορίζουμε $\mathcal{B}' = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$

α') $\mathcal{B}'$ αριθμήσιμη

β') Η $\mathcal{B}'$ αποτελείται από σχετικά ανοικτά σύνολα στο A

γ') Αν U ανοικτό στο X ώστε $G \cap A = U$

Τότε $\exists G$ ανοικτό στο X ώστε $G \cap A = U$

Τότε $x \in G$ άρα από τη γ) υπάρχει $B \in \mathcal{B}$

ώστε $x \in B \subseteq G$. Άρα αφού $x \in A$ $x \in B \cap A \subseteq G \cap A$ δηλαδή

$x \in \underbrace{B \cap A}_{\in \mathcal{B}'} \subseteq U$

Άρα $\mathcal{B}'$ είναι μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του (A, ρ_A) επομένως από το προηγούμενο θεώρημα ο (A, ρ_A) είναι διαχωρίσιμος

Υπενθύμιση: Αν $f : (X, \rho) \to (Y, d)$

(i) Αν $x_0 \in X$ η f λέγεται συνεχής στο x_0 αν
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq B_d(f(x_0), \varepsilon)$

(ii) Η f λέγεται συνεχής
αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$

Εικόνες και αντίστροφες εικόνες συνόλων

Αν $f: X \to Y$

Για $A \subseteq X$ $f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in Y : \exists x \in A : f(x) = y\}$

Για $B \subseteq Y$ $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$

Ιδιότητες: Αν $B, \Gamma \subseteq Y$

$f^{-1}(B \cup \Gamma) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(\Gamma)$

$f^{-1}(B \cap \Gamma) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(\Gamma)$

$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

Γενικότερα αν $(B_i)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Y ισχύει

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

Σημείωση: Για $A, B \subseteq X$ ισχύει $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Γενικότερα αν $(A_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια υποσυνόλων του X τότε

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

Δεν ισχύει εν γένει ότι $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Ισχύει όμως αν f 1-1.

Επίσης $\forall A \subseteq X$ ισχύει $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, $\forall B \subseteq Y$ ισχύει $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

Χαρακτηρισμός της συνέχειας συνάρτησης μέσω τοπολογικών εννοιών

Θεώρημα: Έστω (X, ρ), (Y, d) δύο μ.χ. και $f: X \to Y$ συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Η f είναι συνεχής

(2) Για κάθε $G \subseteq Y$ ανοικτό το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο X

(3) Για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X

(4) Για κάθε $A \subseteq X$ τότε $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

Απόδειξη: (1) => (2) Έστω $G \subseteq Y$ ανοικτό.

Θα δείξουμε ότι το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο X

Έστω $x_0 \in f^{-1}(G)$. Τότε $f(x_0) \in G$.

Εφόσον το G είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $B_d(f(x_0), \epsilon) \subseteq G$ (α)
Εφόσον η f είναι συνεχής, θα είναι συνεχής στο x_0
άρα $\exists \delta > 0$ ώστε $f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq B_d(f(x_0), \epsilon)$ (β)
Από (α) και (β) προκύπτει $f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq G$
και άρα $B_\rho(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$
Επομένως το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό

(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω $x_0 \in X$. Έστω $\epsilon > 0$ (Θ.δ.ο. η f είναι συνεχής στο x_0)
Το $B_d(f(x_0), \epsilon)$ είναι ανοικτό στο Y (ως ανοικτή μπάλα)
άρα από υπόθεση το $f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon))$ είναι ανοικτό στο X.
Εφόσον $f(x_0) \in B_d(f(x_0), \epsilon)$
θα έχουμε $x_0 \in f^{-1}(B_d(f(x_0), \epsilon))$
Αφού το $f^{-1}(B_d(f(x_0), \epsilon))$ είναι ανοικτό στο X
$\exists \delta > 0$ ώστε $B_\rho(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_d(f(x_0), \epsilon))$ και άρα $f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq B_d(f(x_0), \epsilon)$
Συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_0.
Εφόσον αυτό το αποδείξαμε για κάθε $x_0 \in X$
η f είναι συνεχής

(2) $\Rightarrow$ (3) Αν $F \subseteq Y$ κλειστό τότε το $Y \setminus F$ είναι ανοικτό
Από υπόθεση το $f^{-1}(Y \setminus F)$ είναι ανοικτό στο X δηλαδή
το $X \setminus f^{-1}(F)$ -ll- -ll-
άρα το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό

(3) $\Rightarrow$ (2) Αν $G \subseteq Y$ ανοικτό τότε το $Y \setminus G$ είναι κλειστό άρα από υπόθεση
το $f^{-1}(Y \setminus G)$ είναι κλειστό στο X δηλαδή
το $X \setminus f^{-1}(G)$ είναι κλειστό
άρα το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό

(3) $\Rightarrow$ (4) Έστω $A \subseteq X$. Έχουμε $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ άρα $f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$
Επίσης $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
Άρα $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ (*)
Εφόσον το $\overline{f(A)}$ είναι κλειστό στο Y από την υπόθεση το $f^{-1}(\overline{f(A)})$
είναι κλειστό στο X. Άρα από την (*) συμπεραίνουμε ότι
$\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Επομένως $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

(4) $\Rightarrow$ (3) Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό. Τότε $\overline{F} = F$
Εφαρμόζοντας την υπόθεση για το σύνολο $A = f^{-1}(F)$

Έχουμε $\overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \bar{F} = F$

Άρα $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$

Επομένως το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

Σημείωση: Αν $f: (X,\rho) \to (Y,d)$ είναι συνεχής δεν ισχύει εν γένει ότι αν $A \subseteq X$ ανοικτό τότε $f(A)$ ανοικτό στο Y.

Για παράδειγμα η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ με τη συνήθη μετρική για $A = (-1,1)$ έχουμε ότι το A είναι ανοικτό αλλά $f(A) = [0,1)$ που δεν είναι ανοικτό.

Ορισμός: Αν (X,ρ), (Y,d) δύο μ.χ.

α) Μια συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται ομοιομορφισμός αν η f είναι 1-1, επί, συνεχής και η $f^{-1}: Y \to X$ είναι επίσης συνεχής.

β) Οι χώροι (X,ρ), (Y,d) λέγονται ομοιομορφικοί αν υπάρχει $f: X \to Y$ ομοιομορφισμός. Θα συμβολίζουμε $(X,\rho) \sim (Y,d)$ και αν είναι σαφές ποιες μετρικές θεωρούμε στα X, Y θα γράφουμε απλά $X \sim Y$.

Παραδείγματα: α) $\mathbb{R} \sim (-1,1)$

Πράγματι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$ με $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ είναι 1-1, επί, συνεχής η $f^{-1}: (-1,1) \to \mathbb{R}$ $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ είναι συνεχής.

β) $(0,1) \sim (0,2)$ $\quad f(x) = 2x$

γ) $[0,1] \sim [0,2]$ $\quad f(x) = 2x$

δ) Γενικότερα $(a,b) \sim (\gamma,\delta)$ αν $a,b,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ με $a<b$, $\gamma<\delta$

$[a,b] \sim [\gamma,\delta]$

ε) $[0,1] \times [0,1] \sim [0,2] \times [0,3]$ $\quad f(x,y) = (2x, 3y)$

Ορισμός: Έστω X ένα σύνολο και ρ, d είναι δύο μετρικές στο X. Λέμε ότι οι μετρικές ρ, d είναι ισοδύναμες αν ορίζουν τα ίδια ανοικτά σύνολα στο X, δηλαδή για κάθε $A \subseteq X$ το A είναι ρ-ανοικτό αν-ν είναι d-ανοικτό.

Όταν συμβαίνει αυτό θα συμβολίζουμε $\rho \sim d$

Παρατήρηση: Αν X ένα σύνολο και ρ, d δύο μετρικές στο X χρησιμοποιώντας το θεώρημα που ξέρουμε (χαρακτηρισμός συνέχειας με αντίστροφη ανοικτών συνόλων και χαρακτηρισμός συνέχειας με ακολουθίες) προκύπτουν τα εξής:

$\rho \sim d \iff$ Η ταυτοτική $I:(X,\rho) \to (X,d)$ είναι ομοιομορφισμός

$\iff$ Για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε

$B_\rho(x,\delta_1) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$, $B_d(x,\delta_2) \subseteq B_\rho(x,\varepsilon)$

$\iff$ Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X και κάθε $x \in X$

ισχύει $x_n \xrightarrow{\rho} x \iff x_n \xrightarrow{d} x$

Σημείωση: Θα δούμε παρακάτω ότι $[a,b] \not\sim (a,b)$

Επίσης $[0,1] \sim [0,1] \times [0,1]$

Παρατήρηση: Αν (X,ρ) είναι τυχαίος μετρικός χώρος τότε υπάρχει μια φραγμένη μετρική d στο X ώστε $\rho \sim d$

Απόδειξη: Αν ορίσουμε $d(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$ $\forall x,y \in X$ είναι (όπως έχουμε αποδείξει) μετρική στο X. Επίσης $d(x,y) \leq 1$ $\forall x,y \in X$ άρα η d είναι φραγμένη. Τέλος αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τυχαία ακολουθία στο X και $x \in X$.

Ισχύει $x_n \xrightarrow{\rho} x \iff \rho(x_n,x) \to 0$

$\iff \min\{1, \rho(x_n,x)\} \to 0$

$\iff d(x_n,x) \to 0$

$\iff x_n \xrightarrow{d} x$.

Σημείωση: Η $d(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ είναι μια ακόμα επιλογή μετρικής με την ίδια ιδιότητα.

Αρκεί να δείξετε ότι
- $\to$ d μετρική
- $\to$ $d(x,y) \leq 1$ $\forall x,y \in X$
- $\to$ $\rho \sim d$

Ορισμός: Μια ιδιότητα (P) που αφορά μετρικούς χώρους (υπό την έννοια ότι κάθε μετρικός χώρος είτε ικανοποιεί είτε δεν ικανοποιεί την ιδιότητα (P)) ονομάζεται τοπολογική ιδιότητα αν ισχύει το εξής:
Αν ο (X,ρ) έχει την (P) και (Y,d) είναι ένας μετρικός χώρος με $(X,\rho) \sim (Y,d)$ τότε και ο (Y,d) έχει την (P).
Με άλλα λόγια μια ιδιότητα λέγεται τοπολογική αν διατηρείται μέσω ομοιομορφισμών

Παρατήρηση: Αν (P) έχει μια τοπολογική ιδιότητα, (X,ρ) είναι ένας μετρικός χώρος που ικανοποιεί την (P) και d είναι μια μετρική στο X ισοδύναμη της ρ τότε ο (X,d) έχει επίσης την (P) διότι η $I_d : (X,\rho) \to (X,d)$ είναι ομοιομορφισμός

Παραδείγματα: α) Η ιδιότητα να είναι ένας μ.χ. φραγμένος δεν είναι τοπολογική ιδιότητα. Πράγματι αν (X,ρ) ένας μη φραγμένος μ.χ (π.χ. ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική) και d μια φραγμένη μετρική στο X ισοδύναμη με τη ρ τότε οι (X,ρ), (X,d) είναι ομοιομορφικοί αλλά ο (X,d) δεν είναι φραγμένος
β) Η ιδιότητα να είναι ένας μετρικός χώρος διαχωρίσιμος είναι τοπολογική ιδιότητα. Πράγματι, έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και (Y,d) ένας μετρικός χώρος ομοιομορφικός του (X,ρ). Έτσι $\exists D \subseteq X$ που είναι αριθμήσιμο και πυκνό ($\bar{D} = X$) και μια $f: X \to Y$ που είναι 1-1, επί, συνεχής με $f^{-1}: Y \to X$ συνεχής. Το σύνολο $f(D)$ είναι επίσης αριθμήσιμο
(Η $f|_D : D \to f(D)$ είναι (1-1 και) επί) ενώ λόγω της συνέχειας της συνάρτησης f

$f(\bar{D}) \subseteq \overline{f(D)}$

άρα $f(X) \subseteq \overline{f(D)} \Rightarrow Y \subseteq \overline{f(D)}$

$\Rightarrow Y = \overline{f(D)}$

Επομένως το $f(D)$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του (Y,d) άρα ο (Y,d) είναι διαχωρίσιμος

Άσκηση (Μπορεί να θεωρηθεί και ως θεωρία): Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$ με $A \neq \emptyset$. Να δειχθεί ότι $diam(A) = diam(\bar{A})$

Απόδειξη: Εφόσον $diam(K) = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in K\}$

Γενικά αν $K_1 \subseteq K_2$

$\{\rho(x,y) : x,y \in K_1\} \subseteq \{\rho(x,y) : x,y \in K_2\}$

άρα $\sup\{\rho(x,y) : x,y \in K_1\} \leq \sup\{\rho(x,y) : x,y \in K_2\}$

δηλαδή $diam(K_1) \leq diam(K_2)$

Έτσι, εφόσον $A \subseteq \bar{A}$ θα έχουμε $diam(A) \leq diam(\bar{A})$

Απομένει να δείξουμε ότι $diam(\bar{A}) \leq diam(A)$

-> Αν το σύνολο A δεν είναι φραγμένο τότε $diam(A) = +\infty$ και εφόσον $diam(A) \leq diam(\bar{A})$ θα έχουμε $diam(\bar{A}) = +\infty$

-> Αν το σύνολο A είναι φραγμένο οπότε η $diam(A)$ είναι πραγματικός αριθμός, για να δείξουμε ότι $diam(\bar{A}) \leq diam(A)$ αρκεί να δείξουμε ότι $diam(\bar{A}) \leq diam(A) + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$

Έστω $\epsilon > 0$.

Για κάθε $x, y \in \bar{A}$ έχουμε τα εξής:

$x \in \bar{A} \Rightarrow B_\rho(x, \frac{\epsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_1 \in A$ με $\rho(x, x_1) < \epsilon/2$

$y \in \bar{A} \Rightarrow B_\rho(y, \frac{\epsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A$ με $\rho(y, y_1) < \epsilon/2$

Εφόσον $x_1, y_1 \in A$ έχουμε $\rho(x_1, y_1) \leq diam(A)$

Συνεπώς $\rho(x,y) \leq \rho(x,x_1) + \rho(x_1,y_1) + \rho(y_1,y) < \epsilon/2 + diam(A) + \epsilon/2 =$

$= diam(A) + \epsilon$

Εφόσον αποδείξαμε ότι $\rho(x,y) \leq diam(A) + \epsilon \quad \forall x,y \in \bar{A}$

έχουμε $\sup\{\rho(x,y) : x,y \in \bar{A}\} \leq diam(A) + \epsilon$

δηλαδή $diam(\bar{A}) \leq diam(A) + \epsilon$. Εφόσον αυτό ισχύει $\forall \epsilon > 0$ έχουμε $diam(\bar{A}) \leq diam(A)$. Επομένως $diam(\bar{A}) = diam(A)$

Τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$

Έχουμε έναν ενιαίο τρόπο να περιγράψουμε όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$;

Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται (κατά μοναδικό τρόπο) ως αριθμήσιμη ένωση ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων

(πεπερασμένη ή άπειρη)

Σκιαγράφηση της απόδειξης

Έστω G μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζω τη σχέση $\sim$ στο G ως εξής:

$x \sim y$ αν-ν το διάστημα με άκρα τα x και y (που είναι το $\{x\}$ αν $x=y$, το $[x,y]$ αν $x<y$ και το $[y,x]$ αν $y<x$) είναι υποσύνολο του G.

Εύκολα βλέπουμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο G. Τότε κάθε κλάση ισοδυναμίας στο G ως προς $\sim$ (δηλαδή κάθε $I \in G/\sim$) είναι ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$.

Καταρχήν κάθε $I \in G/\sim$ είναι διάστημα.

Το I είναι ανοικτό.

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $G/\sim$ είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, εφόσον κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι μη κενό ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα ρητό αριθμό μέσα σε αυτό.

Προφανώς σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας αντιστοιχούν διαφορετικοί ρητοί διότι οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι ξένες ανά δύο. Έτσι φτιάχνουμε μια συνάρτηση $\phi: G/\sim \to \mathbb{Q}$ και εφόσον το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο 1-1. Το σύνολο $G/\sim$ των κλάσεων ισοδυναμίας είναι αριθμήσιμο.

Έτσι το G είναι αριθμήσιμη ένωση των κλάσεων ισοδυναμίας του που είναι ανοικτά διαστήματα.

$G = \bigcup_{n \in M} (a_n, b_n)$ όπου $(a_n, b_n)_{n \in M}$ ξένα ανά δύο και M αριθμήσιμο.

Ένας δεύτερος τρόπος (ισοδύναμος βέβαια) για να ορίσουμε την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας είναι ο εξής.

Για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G$

Ορίζουμε $a_x = \inf\{a \in \mathbb{R} : a < x \text{ και } [a,x] \subseteq G\}$

$b_x = \sup\{b \in \mathbb{R} : x < b \text{ και } [x,b] \subseteq G\}$

(Δεν αποκλείεται να ισχύει $a_x = -\infty$ ή $b_x = +\infty$)

Τότε $(a_x, b_x) \subseteq G$ και $a_x \notin G$, $b_x \notin G$

Ορίζουμε τη σχέση $\sim$ στο G ως εξής

$x \sim y \iff a_x = a_y$ και $b_x = b_y$

Η $\sim$ είναι η σχέση ισοδυναμίας που περιγράψαμε παραπάνω με άλλο τρόπο.

[Για τυχόντα $x, y \in G$ ισχύει $(a_x, b_x) = (a_y, b_y)$ ή $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) = \emptyset$]

Σημείωση: Η παραπάνω περιγραφή αφορά αποκλειστικά τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Δεν μπορούν να περιγραφούν με αντίστοιχο τρόπο τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$.